

# النهايات والاتصال

## (5) نهايات اعتيادية.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

## (6) النهايات والترتيب.

(a) إذا كان  $|f(x) - l| \leq g(x)$  بجوار  $x_0$  فإن  $\lim_{x_0} f(x) = l$  و  $\lim_{x_0} g(x) = 0$

(b) إذا كان  $f(x) \leq g(x)$  بجوار  $x_0$  فإن  $\lim_{x_0} g(x) = +\infty$  و  $\lim_{x_0} f(x) = +\infty$

(c) إذا كان  $f(x) \leq g(x)$  بجوار  $x_0$  فإن  $\lim_{x_0} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x_0} g(x) = -\infty$

(d) إذا كانت  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  بجوار  $x_0$  فإن  $\lim_{x_0} f(x) = l$  و  $\lim_{x_0} g(x) = \lim_{x_0} h(x) = l$

## (II) الإتصال

### (1) تعريف

لكي نبين أن  $f$  متصلة في  $x_0$  نقوم بحساب  $\lim_{x_0} f(x)$

(\* تكون  $f$  متصلة في  $x_0$  إذا فقط إذا كانت  $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$

(\* تكون  $f$  متصلة على يمين  $x_0$  إذا فقط إذا كانت  $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$

(\* تكون  $f$  متصلة على يسار  $x_0$  إذا فقط إذا كانت  $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$

(\* تكون  $f$  متصلة في  $x_0$  إذا فقط إذا كانت متصلة على يمين و على يسار  $x_0$ .

### (2) خاصيات

(a) كل دالة حدودية متصلة على  $\mathbb{R}$ .

(b) كل دالة جذرية متصلة على حيز تعريفها.

(c) (\* الدوال  $x \rightarrow \sin x$  و  $x \rightarrow \cos x$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

(\* الدال  $x \rightarrow \tan x$  متصلة على حيز تعريفها.

(d) إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على مجال  $I$  فإن الدوال  $f + g$  و  $f \cdot g$  و  $\alpha f$  متصلة على  $I$ .

وإذا كانت  $g$  لاتتعدم على  $I$  فإن  $\frac{f}{g}$  متصلة على  $I$ .

### ملاحظة

إذا كانت  $f$  دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مجموع وجداء دوال متصلة في غالب الأحيان.

### (3) التمديد بالاتصال

لتكن  $f$  دالة غير معرفة في  $x_0$  ، لكي نبين أن  $f$  تقبل تمديدا

بالاتصال في  $x_0$  نقوم بحساب  $\lim_{x_0} f(x)$  وإذا وجدنا  $\lim_{x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

فإن  $f$  تقبل تمديدا  $g$  بالاتصال في  $x_0$  معرف بما

$$\begin{cases} g(x) = f(x), & x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases} \text{ يلي:}$$

## (I) النهايات

### (1) الأشكال الغير محددة:

$+\infty - \infty$	$\infty \times 0$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
--------------------	-------------------	-------------------------	---------------

### (2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$$a \times \infty = \infty \quad (a \neq 0)$$

$$\infty \times \infty = \infty$$

$$0 \times \infty \text{ ش غ محدد}$$

$$+\infty + a = +\infty$$

$$-\infty + a = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty - \infty \text{ ش غ محدد}$$

$$\frac{\infty}{a} = \infty \quad \frac{a}{\infty} = 0 \quad \frac{a \neq 0}{0} = \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \text{ ش غ محدد}$$

$$(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$\sqrt{+\infty} = +\infty$$

### (3) خاصيات

(a) إذا كانت للدالتين  $f$  و  $g$  نهاية منتهية في  $x_0$  فإن الدوال  $f + g$  و  $f \cdot g$  و  $\alpha f$  تقبل نهاية منتهية في  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

وإذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) \neq 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$

(b) نهاية دالة حدودية في  $\infty$  هي نهاية الحد الأكبر درجة .

(c) نهاية دالة جذرية في  $\infty$  هي نهاية خارج الحدين الأكبر درجة

### (4) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا جذرية:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \leftarrow \text{التعميل.}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = +\infty - \infty$$

(\* إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من  $f(x)$  و  $g(x)$  متقابلين  $\leftarrow$  المرافق.

(\* إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من  $f(x)$  و  $g(x)$  غير متقابلين  $\leftarrow$  التعميل.

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a-a}{0} = \frac{0}{0} \leftarrow \text{المرافق.} \quad (a \neq 0)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0} \leftarrow \text{التفكيك ثم ربما المرافق.} \quad (a \neq 0)$$

$$(e) \text{ ملاحظة: } \begin{cases} x = \sqrt{x^2}; & x \geq 0 \\ x = -\sqrt{x^2}; & x \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad \sqrt{x^2} = |x|$$